数理解析研究所講究録
51巻 1968年 133-144

プラズマにおけるシュミレーション
（Lagrange 型）

阪大 基礎工　長谷川 晃

§1. 序

Lagrange 型，即ち，粒子軌道を追跡する方法によるプラズマのシュミレーションは，普通，適当な境界中のプラズマを数百ないし数千個の超粒群の集合と考え，これら超粒子の運動を自己無撞着の場の中で追跡することによって行う。

プラズマは荷電粒子の集合であるから，粒子間には電磁場による long range の力が働くため，相関性の強い多体問題を考えなければならない。 特に乱れが生じた場合には，その統計力学的な処理は極めて困難である。 したがって，計算機によるシュミレーションを行うことは，非常に適切であり，また有効であると考えられる。

プラズマを超粒子の集合に分割する場合，その方法により一次元，または二次元，さらに三次元のモデルが考えられる。計算機の容量の制限から，従来一次元モデルが多く用いられ

て来たが、最近では二次元モデルもよく用いられるようになり，ごく最近では，カリフォルニア大学で三次元のモデルが作られ，興味ある結果が得られつつあると聞いている。

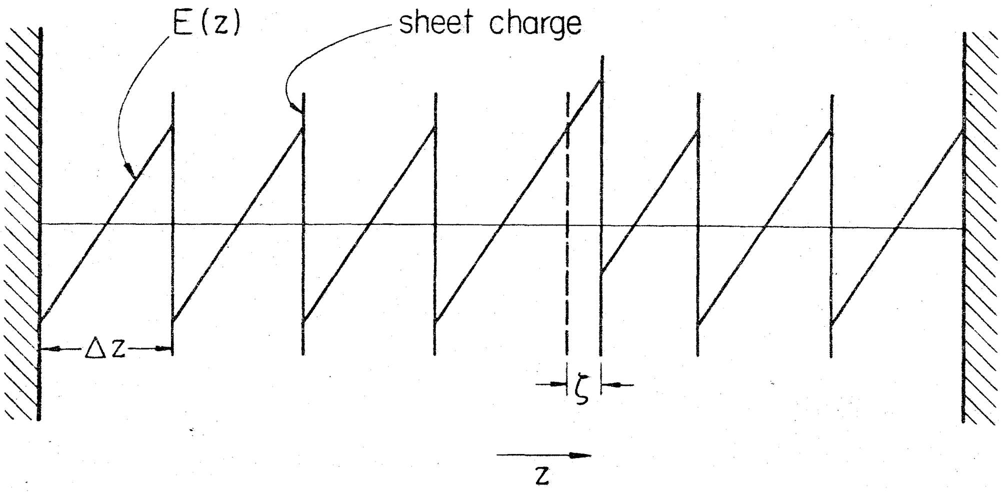
それでは具体的にどのようなモデルが用いられているかを代表的なものを挙げて説明してみよう。

§2．シート電荷モデル

問題となる対象を適当な超粒子に分割することをモデル化すると言うことにする。仮りに今プラズマの最も基本的な現象であるプラズマ振動およびそれに関係した現象を表わすモデルを考えよう。

問題は一次元とし，変位の方向をzにとることにしよう。さらに簡単のためイオンは質量が大きいため動かないものとする。その中での電子群の，振巾の小さい単振動を考えよう。電子群が単振動を生ずるためにはその小さい変位ξに対し，それに比例する力を考えねばならない。したがって振動に伴う電場$E(z)$はz方向の粒子の変位ξに比例する必要がある。この状態は，例えば第1図に示すように，固定したイオンの海の中にz軸に垂直でz方向に可動な，面電荷密度$\rho_s=-en_0\Delta z$，質量$mn_0\Delta z$のシート電荷で代表された電子群のモデルにより実現できる。ここにΔzは一枚のシートが

代表するプラズマ電子の厚み，n_0はプラズマの密度を表わす。この状態ではシート間の電場はzに比例して$E(z)=\frac{en_0}{\varepsilon_0}z$となり，シートに働く電場は正しく変位$\zeta$に比例する。したがってシートの振動周波数は$\sqrt{\frac{e^2n_0}{\varepsilon_0 m}}=\omega_{pe}$となり，プラズマ振動を表わす。



第1図プラズマ中の縦振動を表わす
．シート電荷モデル。

これに対し，例えばイオンもシート状に表わし，電子を表わすシート電荷と交互においたとすると，シート間での電場は一定となるから，一枚の電子シートの動きは単振動をしなくなるばかりか，実際イオンシートを越えて動くまた電子シートは一定の力しかうけないことになる。したがってそのようなモデルでは，微視的には(一枚のシートに対しては)プラズマ振動は現われない。しかしプラズマ振動の波長がシー

ト間隔に比べ十分長いと，多くのシートが集合的に動き，プラズマ振動を作り出すことができる。 このように同じ問題に対し，同じようなモデルを用いても，そこに微妙な違いがあることに注意しなければならない。

このようにして作られたモデルが ergodic な性質をもつためには Δz が Debye 長よりも短くなければならないことが示されている。 これはこのモデルが統計力学的に意味のあるように作られるための必要条件となる。 この種類のモデルすなわちシート電荷モデルが応用されている問題は非常に多く大体次に示すような例がある。

イオンのない電子群だけの問題も入れると古くは電子管の動作の解析に用いられたのを始め，二極管の雑音の問題，2極管中の不安定の問題，空間電荷波，熱電子変換，共鳴探針，イオンロケットなどの問題の他，物理的なものとして位相空間での緩和の問題，2流体不安定の問題がある。

§3．シート電流モデル

プラズマ中に外部磁場が存在すると，前記のプラズマ振動の他に，粒子の磁場のまわりの回転を伴う横波が存在する。この横波は，波の伝播方向が，外部の方向と一致する場合には，完全に縦波と分離するが，それ以外の場合には分離せず

複雑な形をとることになる。 そこで簡単のための磁場方向に伝わる横波を表わすモデルの例としてイオンサイクロトロン波に関するモデルを考えてみよう。

イオンサイクロトロン波は横波であるから線形域での波の場は完全に横方向にしか存在せずそれらは粒子の横方向の回転によって作られている。 これらの粒子は磁場に垂直な面内では同じ位相で動いているから，この面に粒子を固定して，代りにシートを回転させても同じ効果が得られるはずである。次に非線形域では，波の磁場 B と粒子の電流 J の間の力 $J\times B$ により z 方向に粒子が動くため縦波との結合が生ずることが考えられるが，イオンサイクロトロン波の場合縦方向のイオンの電荷分離によって生ずる電場は，普通，軽い電子によって短絡されると考えられるから，これは無視することができる。 したがって Coulomb 電場は存在しなくなり §2 の Δz と Debye 波長の関係は不要となる。 シートは磁場に垂直方向の電流のみを作り，それによって生ずる場は

$$\nabla^2 A(z,t) = -\sum \mu_0 e n_0 v_i(t)\,\delta(z - z_i(t))\,\Delta z$$

$$E(z,t) = -\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}$$

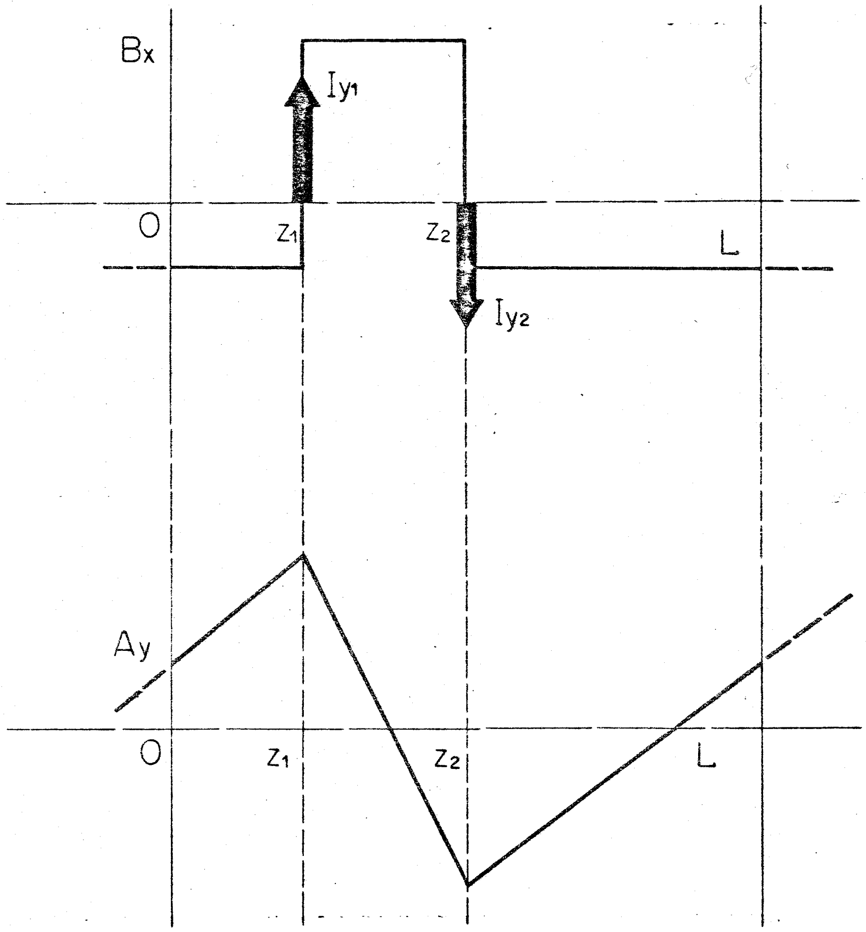
$$B(z,t) = \nabla \times A(z,t)$$

またシートに対する運動方程式は

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{e}{m}\left[E(z_i,t) + v_i \times B(z_i,t)\right]$$

で与えられる。

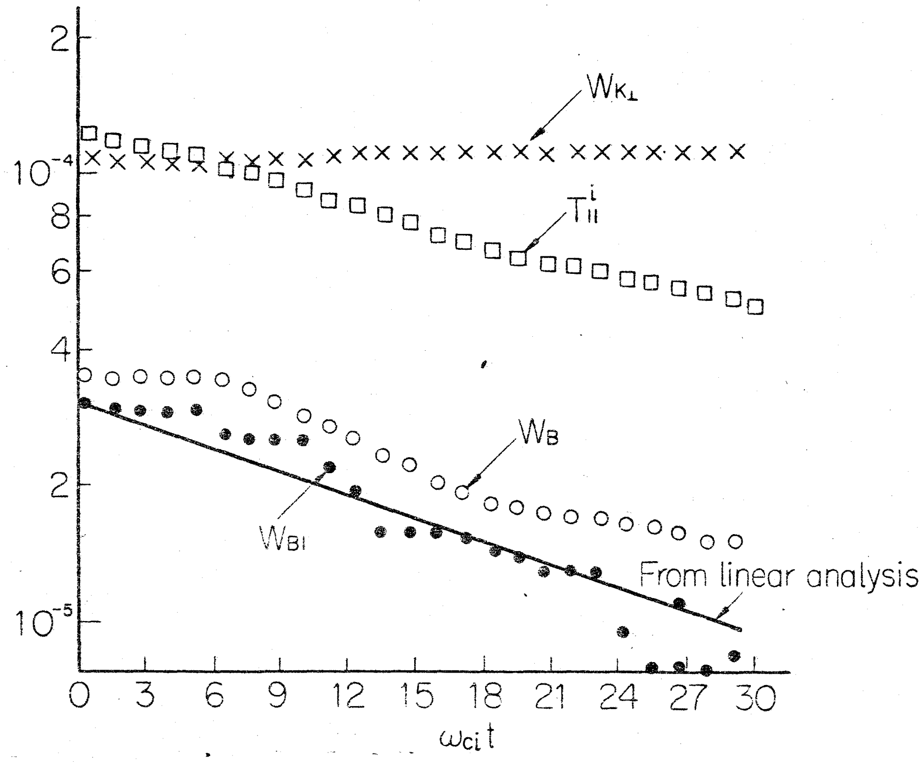
例えば1 Fourier 区間で，電流がy方向に流れている時のA, Bは第2図のような形をしている。



第2図　シート電流モデルの作る磁場電。

このモデルを用いて，例えば粒子のz方向の速度分布が影響して生ずるサイクロトロン波の減衰，"サイクロトロン減衰"を実現してみた結果を示すと第3図のようになる。 図でW_{B1}は波の場の基本フーリエ成分のエネルギー，W_Bは波の全場の

エネルギー，$T_{\parallel}$は磁場方向の温度，$W_{K\perp}$は磁場に垂直方向の運動のエネルギーを表わす。　この計算の場合，シートの数は波長当りわずか20枚であるが，その20枚のシートの速度分布



第3図　シート電流モデルによる高温プラズマ中のイオンサイクロトロン波の減衰の実現。

の効果がBoltzmann方程式を解いて得られる理論結果(実直線)と一致することは興味深い。　このような振巾の変化だけではなく波の位相速度についても理論値とほとんど完全に一致する。

このようなモデルのことをシート電流モデルと言い，イオ

ンサイクロトロン波およびその不安定，イオンサイクロトロン加熱などの問題に応用されている他，磁場に垂直に伝わるショック波の解析などにも用いられている。

§4．棒状電荷モデル

§2，§3においてシートモデルが一次元のプラズマ中の現象を表わし得ることを示した。しかし本質的に二次元である現象についてはシートモデルでは現象を完全にモデル化することはできない。

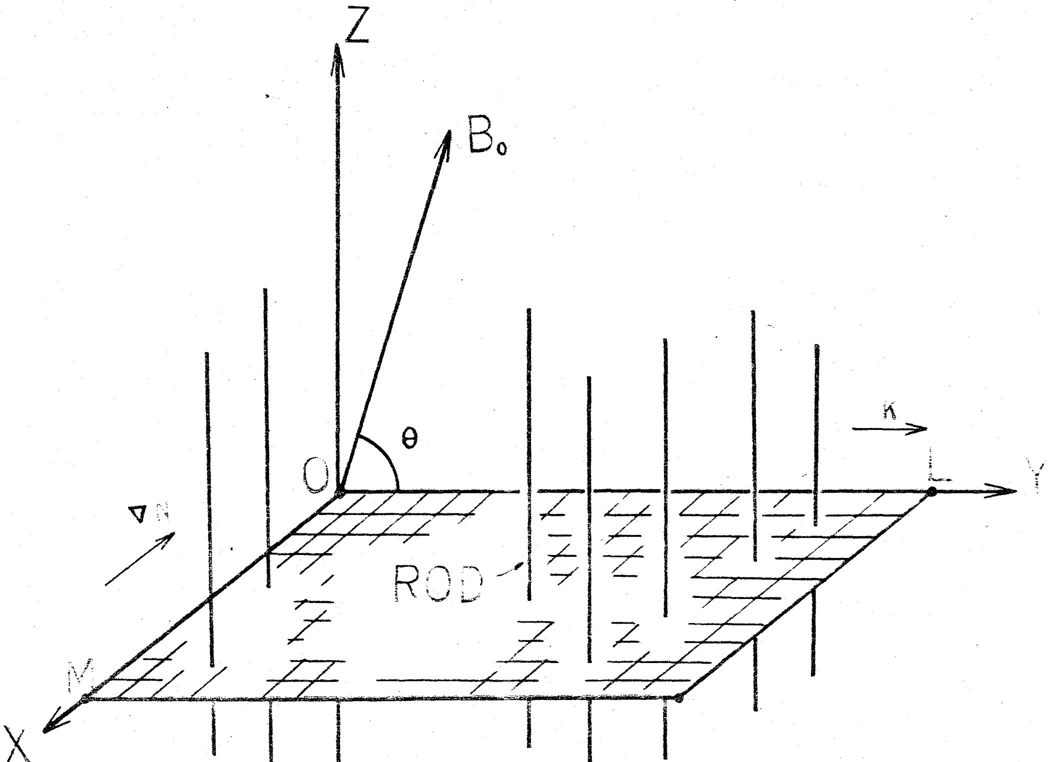
そこでこれらの現象を表わすには二次元のモデルが必要になってくる。

次にその例としてプラズマが一様でない場合，すなわちプラズマに密度の勾配や温度の勾配がある場合に生ずるドリフト波およびドリフト不安定による磁場を横切る異常拡散の現象を表わすモデルを考えてみよう。

一様な磁場中のプラズマに密度勾配が存在するとき，プラズマは磁場に斜めに，しかしほぼ垂直に伝播するイオン音波に対して不安定であることが知られており，ドリフト不安定と呼ばれている。　この不安定の本質的な原因はプラズマの密度勾配であり，密度勾配がプラズマの境界近くには必然的に存在することを考えると重要な不安定であり，またこれが

プラズマの異常拡散の原因となる。　このような現象をモデル化するために次のようなモデルが考えられている。

プラズマに密度勾配を持たせるために超粒子としてシートの代りに棒状(ロッド)電荷を用い，図のようにx方向に密度の勾配を持たせる。　B_0は外部磁場で波はこれにθなる角度をなして伝播するものとする。　そのためy方向には一つのFourier区間でまたx方向には与えられた境界面(例えば，プラズマを一定に発生する層とか，プラズマをとじこめている容器の壁等)で限られた一つの領域のx-y面上でのロッドの動きを計算機で追跡することで上述の現象を表わし得る。　ロッドが運動して作る場は2次元のFull Maxwell方程式を解けば求まる訳であるが実際は現在の電子計算機では不可能である。



しかし現象がイオンのサイクロトロン周波数にくらべて低い周波数で起ることと，密度が薄いプラズマにおいてはプラズマ中の電流による磁場の曲りや勾配等は無視出来るということから quasi-electrostatic 近似を用いることができる。

すなわち場の方程式とロッドに対する運動方程式は

$$\nabla^2\phi(x,y,t) = -\sum_i \frac{e}{\epsilon}\delta(x-x_i(t))\,\delta(y-y_i(t))$$

$$\underset{\sim}{E}(x,y,t) = -\underset{\sim}{\nabla}\phi(x,y,t)$$

$$\frac{d\underset{\sim}{v}_i(t)}{dt} = \frac{e}{m}\left[\underset{\sim}{E}(x_i,y_i,t) + \underset{\sim}{v}_i(t)\times \underset{\sim}{B}_0\right]$$

ところでこれでも Poisson の方程式を解いて各々のロッドの位置からポテンシャルを求めることは計算機の速度から考えて無理である。それでこれに代る方法として図のように x-y 面内の領域を Mesh に分割し，各々の Mesh 点を中心に領域を多くの cell に分割する。そしてその cell 中にあるロッドの数に比例した電荷を Mesh 点の電荷と考え領域の電荷分布を求めこの分布により Poisson の方程式を Mesh 点を用いる通常の差分形になおして解き Mesh 点上の電場を求める。この電場をその Mesh 点に属する cell 中のロッドに働く電場として Newton の方程式に従ってロッドの運動を追跡する。このような方法も領域内で Poisson の方程式を解く非常に速い方法の開発により始めて可能になったことである。

Poisson の方程式を解くとき用いた近似の総合効果はこのモ

デルを使用したとき二つの棒状電荷の間に働く力を実際に二本の線電荷間に働く静電力の理論値とくらべて見ることにより分る。　この結果は図のようになる。

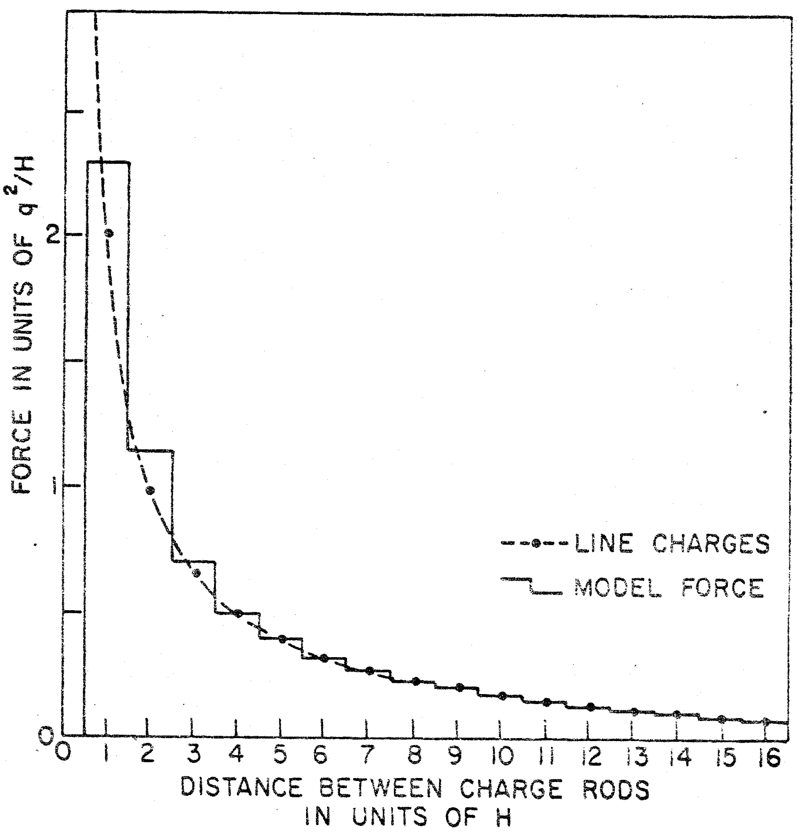


FIG. 10. GRAPH OF THE LAW OF FORCE. q is charge per unit length; H is mesh interval.

もしロッド間隔が 6 Mesh 間隔より大きいならばモデルにより計算された力は理論値とよく一致する。　従ってプラズマの Debye 波長がこれより大きければこのモデルはプラズマの巨視的な現象を表わすことができる。

このようなモデルを棒状電荷モデルと呼ぶ。実際このモデルは$\theta=90°$の場合について約1000個のロッドを用い，プラズマの磁場を横切る異常拡散の問題に使用され十分な結果が得られている。

参考文献は

長谷川　晃：プラズマのComputer Experiment，物理学会誌，21巻，第9号，643-646を参照されたし